

---

## EXERCICES 1 B

---

1. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

2. Soit  $\mathbb{N}^2$  l'ensemble des  $(x, y)$  où  $x, y \in \mathbb{N}$ . On définit la relation  $P$  sur  $\mathbb{N}^2$  comme :

$$(x, y)P(x', y')$$

si  $x > x'$  ou si  $x = x'$  et  $y \geq y'$ .

On définit une autre relation  $Q$  sur  $\mathbb{N}^2$  comme :

$$(x, y)Q(x', y')$$

si  $y > y'$  ou si  $y = y'$  et  $x \geq x'$ .

- a) Montrer que  $P$  et  $Q$  sont des relations d'ordre sur  $\mathbb{N}^2$ .
  - b) Combien y-a-t-il d'éléments  $(x, y)$  de  $\mathbb{N}^2$  qui satisfont  $(x, y)Q(5, 4)$  ?
  - c) Combien y-a-t-il d'éléments  $(x, y)$  de  $\mathbb{N}^2$  qui satisfont  $(x, y)Q(5, 4)$  et  $(x, y)P(2, 3)$  ?
3. Parmi les ensembles suivants, trouver ceux qui sont majorés et donner trois majorants pour chacun d'entre eux lorsqu'ils existent :
- a)  $]0, 1]$
  - b)  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
  - c)  $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 4\}$
  - d)  $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$
  - e)  $\{\sin(n\pi/3) : n \in \mathbb{Z}\}$
  - f)  $\{1 - \frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N}\}$
  - g)  $\{\cos(x) : x \in \mathbb{Q}\}$
  - h)  $\{\cot(x) : x \in \mathbb{R}\}$
  - i)  $\{\tan(x) : x \in \mathbb{R}\}$
4. Même question pour les minorants (et trouver les ensembles qui sont minorés du coup). Quels sont les ensembles bornés ?